Philosophy, Knowledge, and the Sciences
T

Le "problème" des mathématiques

Jean-Michel Salanskis

Il n'y a pas véritablement accord sur ce qu'est la philosophie des sciences : il existe plusieurs façons de la définir et de concevoir sa mission. Cette pluralité d'acceptions, bien sûr, est liée à la pluralité des manières de comprendre la philosophie elle-même en général, mais elle n'en dépend pas de manière parfaite : des façons différentes d'appréhender la philosophie des sciences sont susceptibles de vivre juxtaposées à l'intérieur d'une sensibilité partagée au sujet de l'exercice philosophique.

Le point que je voudrais mettre en relief, et que je voudrais tenter de commencer à discuter, est que les mathématiques posent au moins tendanciellement un problème à presque toute approche de philosophie des sciences.

Ce point est paradoxal au moins à deux égards :

1) D'une part les mathématiques semblent à première vue simplement une des sciences dont une philosophie des sciences doit s'occuper. Comment et à quel titre poseraient-elles problème à la démarche elle-même ? Le pouvoir de nuisance maximal d'un objet vis-à-vis d'une enquête portant sur lui n'est-il pas son impénétrabilité ? Or, ce que nous allons tenter de montrer, c'est que le cas des mathématiques est susceptible de déstabiliser la démarche de la philosophie des sciences d'une manière en substance "plus radicale".
2) D'autre part, les mathématiques sont regardées, depuis fort longtemps, comme le lieu de la réassurance la plus grande pour la rationalité, pour la science. Il est pour le moins inattendu, dans ces conditions, qu'elles fassent problème pour une philosophie des sciences cherchant, du moins on peut le supposer, à s'approprier, refléter ou confirmer la rationalité des sciences.

 DOI: 10.4454/teoria.v39i1.66

Mais le “problème des mathématiques” n’est pas seulement une surprise ou un dérangement paradoxal pour la philosophie des sciences, il est aussi révélateur de l’essence des mathématiques, ainsi que, d’ailleurs, de la place des mathématiques dans la culture. La présente réflexion prend donc ce problème comme une chance, elle y voit un bon angle pour déchiffrer quelque chose du mystère des mathématiques, une incitation salutaire à prendre les mathématiques au sérieux et accueillir leur performance.

Essayons, donc, d’entrer dans ce problème prometteur.

1. *Philosophie des mathématiques ?*

Une première face du problème est liée au projet d’une philosophie des mathématiques.

On considère le plus souvent, à ce qu’il me semble, que les notions de spécialisation de la philosophie par un objet appartiennent à l'époque contemporaine ou quasi-contemporaine. Qu’elles sont liées à une cartographie de la philosophie par elle-même largement fonction de la construction académique de celle-ci (Pierre Macherey observait, je m’en souviens, que Kant était le premier philosophe de l’histoire ayant travaillé dans le statut de professeur de philosophie à l’Université). En particulier la notion de philosophie des sciences est sans nul doute récente.

Pourtant j’ai entendu soutenir que la notion de philosophie des mathématiques est plus ancienne. Tout, ici, est affaire de définition, et je ne sais pas s’il faut valider un tel jugement. Certes, il est sans doute vrai que le champ philosophique accueille en lui avant la période récente des débats que nous reconnaissons irrésistiblement, dans l’après coup, comme des débats de philosophie des mathématiques : tel, typiquement le débat sur le calcul infinitésimal. Mais en même temps, chez Kant encore pour revenir à cet exemple, les considérations de philosophie des mathématiques que nous trouvons dans son œuvre ne sont pas concentrées et localisées dans des ouvrages dédiés de philosophie des mathématiques, ce qui peut sembler une condition pour que la branche puisse être dite exister.

Cela dit, Kant soulève dans au moins un texte le problème du rapport de la philosophie aux mathématiques : dans le court mémoire « Comment introduire en philosophie le concept de grandeur négative ? ». Ce texte est important pour nous en raison de son étrange posture : si Kant déclare, au début du mémoire, que le projet d’écrire la philosophie *more geometrico* est vain, et s’il souligne une sorte de disparité entre les deux disciplines, interdisant en principe la moins sûre (la philosophie) de reprendre en son sein les résultats comme la méthode de la plus sûre (les mathématiques)[1], néanmoins il s’engage exactement dans le projet d’une telle reprise. Et au fil de sa réflexion, il en vient à affirmer une supériorité traditionnelle de la philosophie : le fait qu’elle sait mieux arrêter le contour de ce dont on parle, s’agît-il de contenus mathématiques[2].

Ce texte de Kant, d’ailleurs, semble se tenir en deçà de ce qu’on peut appeler philosophie des mathématiques : ce dont il traite et dans quoi il s’engage n’est pas une évaluation philosophique des mathématiques, il est plutôt question de réussir une hybridation en faisant venir quelque chose des mathématiques dans la philosophie (la notion d’opposition réelle).

Comme, par ailleurs, Kant a remarquablement pris le chemin de la philosophie des mathématiques (à nos yeux au moins) dans l’ensemble de son œuvre, notamment dans la *Critique de la raison pure*, nous voyons surgir à partir de lui un premier versant du problème. Ce serait celui-ci : le rapport des mathématiques avec la philosophie est-il entretenu de manière optimale par une philosophie des mathématiques, ou la démarche consistant à emprunter en philosophie quelque chose des lumières de la mathématique est-elle plus dans l’essentiel ?

Ce problème se pose de façon constante, et donne lieu à un dégradé subtil et passionnant d’attitudes. Un auteur comme René Thom, en France, a récemment donné des lettres de noblesse à l’idée d’une philosophie mêlant sa voix aux mathématiques, tirant parti d’elles[3]. Un auteur comme Jean-Toussaint Desanti, dans la même période, incarnait en revanche l’idée d’une gnoséologie hétérogène à la mathématique prenant intérêt pour elle, s’appliquant à elle. Même si Desanti tenait quant à lui à préciser que, dans une telle démarche, la philosophie devait pour une part parler depuis l’intérieur des mathématiques, en se refusant la facilité avec laquelle les philosophies traditionnelles avaient prétendu intérioriser à elles la mathématique[4].

[1] Cf. E. Kant, *Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeurs négatives*, trad. franç. J. Ferrari, in *Kant Œuvres Philosophiques I*, Pléiade, Gallimard, Paris 1980, pp. 261-302 ; édition originale 1763. Ce que je résume dans ce paragraphe est le contenu du début de l’avant-propos (p. 261 ; II, 167).

[2] C’est le contenu, à peine explicite, du paragraphe de la page 264-265 [II, p. 170].

[3] Cf. R. Thom, *Modèles Mathématiques de la Morphogenèse*, Unions Générale d’Editions, Paris 1974.

[4] Cf. J.-T. Desanti, *Sur le rapport traditionnel des sciences et de la philosophie*, in *La Philosophie silencieuse*, Le Seuil, Paris 1975, pp. 7-109.

Une mention spéciale est due, à cet égard, à la démarche de la philosophie analytique. Par un aspect, ce qu'elle a fait, en révolutionnant le travail philosophique, c'est tout simplement le contraindre à suivre les rails et les voies argumentatives de la logique des prédicats du premier ordre, que des gens comme Frege avaient extraite en tant que forme de l'activité mathématique (typiquement l'arithmétique). Mais en fin de compte, la philosophie analytique a engendré une discussion philosophique "logico-linguistique" restant à distance du foisonnement et de la complexité du développement mathématique (même de ceux de la logique, à vrai dire). Et le nouveau mode philosophique a finalement produit une "philosophie des mathématiques" évaluant de l'extérieur l'édifice mathématique, comme on le fait en mode "continental". La sorte d'analyse que l'on conduit, dans ce contexte, est largement fondée sur la logique. C'est comme si la philosophie se glissait dans les vêtements techniques de la logique pour juger des mathématiques, en tirant argument du fait que la discipline logique semble avoir quelque droit à se dire en position fondationnelle par rapport à l'exercice des mathématiques. Néanmoins, sous la plume des auteur(e)s majeur(e)s du courant, on voit surgir des arguments proprement philosophiques, nous confirmant que la veine "philosophie des mathématiques" – au sens de l'application à l'évaluation ou l'interprétation des mathématiques d'une gnoséologie externe, proprement philosophique – n'est pas morte.

En même temps, si l'on s'en tient à la conversion de la philosophie à un régime argumentatif strict d'une part, à l'emploi de la consignation symbolique des formules d'autre part, on peut avoir le sentiment d'une philosophie engagée sur la voie de d'une nouvelle hybridation, de type méthodologique. La tension que nous essayons de décrire se maintient donc.

2. *La question de la physique*

De manière contemporaine, nous disons "Philosophie des sciences" en pensant de manière générale à une application de la philosophie aux sciences – à chacune des sciences, tour à – qui détermine en même temps une spécialité académique.

Pourtant, il est clair, si l'on examine les grands précédents fondateurs que sont, pour la philosophie des sciences, les démarches à certains égards programmatiques de Kant et de Carnap, que parmi les sciences, la physique est privilégiée.

Chez Kant, ce privilège est ouvertement avoué. D’une part, il décrit l’entreprise critique comme largement suscitée par l’admiration éprouvée devant la science newtonienne, allant, dans les *Prolégomènes*…, jusqu’à tenter d’exposer la critique à partir du fait épistémologique de cette science, au moyen d’une analyse régressive remontant d’un tel fait à ses conditions de possibilités[5]. D’autre part, dans les *Premiers principes d’une philosophie de la nature*, il explique dans la préface pourquoi seule la physique, à ce jour, est à proprement parler une science à ses yeux[6].

S’il en va ainsi, on le sait, c’est pour ainsi dire “à cause des mathématiques”, ce qui nous ramène à notre sujet. Pour Kant en effet, une science n’en est une que si elle est une connaissance a priori : si elle va au-delà du bilan des expériences, même augmenté de lois inductives. Une science doit énoncer des prédictions sur le mode d’une anticipation du monde qui en est, au fond, une reconstruction. Ce qui veut dire qu’elle “construit” un schéma du monde dans les intuitions pures de l’espace et du temps. Mais faire cela, c’est entrer dans la démarche de la construction de concepts qui est celle des mathématiques. Pas de science, donc, sans élaboration mathématique a priori de la région du réel dont on s’occupe. Il se trouve que, jusqu’à présent, seule la physique a fait cela, projetant sur le mode mathématique le concept empirique de “matière en mouvement”, ainsi que Kant s’attache à l’expliquer et l’exposer plus complètement dans les *Premiers principes*…. Kant juge que la psychologie ne pourra jamais le faire, et tente d’esquisser la manière dont la chimie pourrait y parvenir, prophétisant si l’on veut la chimie quantique[7].

La mathématique intervient donc, dans une telle approche, comme ce qui signe la scientificité de la science.

Le cercle de Vienne, venant après, fut impulsé par des auteurs nourris de culture kantienne. On trouve chez Carnap, le père fondateur de la nouvelle école, de fréquentes allusions à la philosophie kantienne. Le décalage, de la philosophie kantienne de la science, vers une philosophie analytique des sciences d’une espèce nouvelle, se fait d’ailleurs de manière lente et problématique, pour qui regarde ce développement avec un regard d’historien. Peut-être même la strate kantienne n’est-elle jamais complète-

[5] Cf. E. Kant, *Prolégomènes à toute métaphysique future qui pourra se présenter comme science*, trad. franç. J. Rivelaygues, Éditions de la Pléiade, sous la direction de F. Alquié, tome II, Gallimard, Paris 1985, pp. 17-172 [IV, pp. 255-383] ; édition originale 1783.

[6] Cf. E. Kant, *Premiers principes métaphysiques de la Science de la nature*, trad. franç. J. Gibelin, Vrin, Paris 1982, pp. 11-13 [IV, pp. 470-471]; édition originale 1786.

[7] Cf. *Premiers principes métaphysiques de la Science de la nature*, cit., p. 12 [IV, pp. 470-471].

ment abandonnée, si l'on en juge par des "come back" impressionnants et récurrents[8].

En substance, à l'époque carnapienne, la science est encore conçue comme une manière de "sauver les phénomènes", elle est donc originairement décrite comme incluse pour ainsi dire dans une "réduction aux phénomènes" que la jeune philosophie analytique va pourtant, de plus en plus, reprocher à Kant. La différence, d'emblée décisive, est néanmoins que l'information provenant de l'expérience est supposée toujours traduite dans des *énoncés protocolaires*, comptes rendus de ce qui se passe dans le laboratoire. Ces énoncés protocolaires, on le sait, seront ce par rapport à quoi on vérifie les lois universelles se déduisant de la théorie scientifique courante, supposée mise dans la forme exemplaire et typique d'une théorie logique du premier ordre. Mais cela suppose que l'on admette, au niveau de la formulation de ces énoncés protocolaires, une référentialité simple et non problématique. Ce qui nous permet de prendre $R(t_1,\ldots t_n)$ comme une entrée informative provenant de la nature, c'est que dans le contexte du laboratoire nous saisissons les objets dénotés par $t_1,\ldots,t_n$ et sommes en mesure de constater à leur propos la propriété R. L'empirisme logique en train de naître est donc amené à rompre avec le kantisme en se donnant la référentialité simple du langage comme base pour toute l'élaboration scientifique, au lieu de prendre l'objet, déjà pour la connaissance ordinaire, comme le fruit d'une synthèse, toujours à reprendre et à remettre en cause dans la science. Telle est la manière d'hériter de la révolution référentialiste opérée par Frege et Russell.

Il en résulte que la question des mathématiques suscite une sorte d'antinomie fondamentale de la philosophie des sciences, que je résumerai dans les termes suivants :

1) D'un côté, nous ne pouvons que prendre acte de ce que le mode de la physique mathématique est celui du triomphe contemporain de cette science, et cela nous forcerait à interpréter la physique comme Kant.
2) De l'autre côté, si nous sommes convaincus par Frege et Russell, nous ne pouvons comprendre la science que comme une élaboration théorique fondée sur les liens référentiels fondamentaux de notre langage avec le réel.

[8] Tel celui de John McDowell (cf. J. McDowell, *L'esprit et le monde*, trad. franç. C. Alsaleh, Vrin, Paris 2007).

Si l'on regarde la science côté 1), on la voit comme caractérisée par son usage des mathématiques. Un usage qui consiste à projeter a priori le réel sur la toile d'une structure mathématique, ce qui conduit d'entrée de jeu à une rupture avec le sens commun. Puis, au-delà, à une faculté de rupture de la science avec elle-même, rupture obtenue à chaque fois par l'adoption d'une nouvelle structure mathématique de référence (on échange le $\mathbf{R}^3$ euclidien contre une variété pseudo-riemanienne, ou l'un et l'autre contre un espace de Hilbert muni de quelques opérateurs auto-adjoints compacts). On interprète le rapport à l'empiricité aussi dans cette ligne, en soulignant que l'espace de repérage choisi dicte le recueil de données dans le monde (extraction d'objets mathématiques de l'expérience), et commande symétriquement la possibilité d'introduire des objets mathématiques dans le monde (préparation d'une expérience).

Si l'on comprend bien ces dimensions culturellement essentielles de la science, en revanche, on a de la difficulté avec l'autre critère de démarcation plus volontiers mis en avant dans la tradition empiriste : celui de la confrontation avec l'expérience, garantissant, notamment, le caractère réfutable des cadres mathématiques introduits. Ce qui fonctionne comme a priori mathématique, clairement, doit aussi être révisable (même si cette révision doit consister en une ré-anticipation, en une reprise de l'imagination mathématique du monde). Pour avoir une telle réfutation expérientielle, il semble bien qu'il faille, en fin de compte, que nous puissions formuler les résultats d'expérience comme des énoncés protocolaires: nous devons faire appel à la vérification du sens commun, fondée sur la référentialité frégéenne présupposée du langage.

Si l'on examine la science du côté 2) [post-frégéen], c'est-à-dire en substance avec un regard d'empiriste logique, alors on doit rendre compte du fait que la science reine peuple son discours d'entités n'ayant pas du tout de statut référentiel ordinaire. Le simple fait d'évoquer des vitesses instantanées place déjà le discours au-delà de la référentialité usuelle, puisque nous savons seulement définir une telle vitesse comme nombre dérivé d'une fonction, ce qui mobilise les objets idéaux de la mathématique. On a donc le paradoxe d'une science présumée réaliste – et célébrée comme la plus puissante à l'égard du réel – dont la démarche consiste néanmoins à raconter une histoire où tiennent une place centrale les objets problématiques, abstraits ou idéaux, de la mathématique. Les réponses classiques de la philosophie analytique des sciences, au premier chef de l'empirisme logique, consistent à expliquer cette couche mathématisante de la physique comme un surplus inessentiel par rapport à un discours strictement empirique donnant lieu, via cette couche supplémentaire, à des prédictions elles-mêmes strictement empiriques (une possibilité typique consiste à supposer que la théorie mathématisante est une extension conservative de la théorie empirique).

Une dernière remarque, pour souligner le poids et la profondeur de ce “problème des mathématiques” dans la philosophie des sciences contemporaines. Est apparu, assez récemment, un argument de philosophie des mathématiques célèbre, que l'on baptise argument d'indispensabilité. On l'attribue à la fois à Quine et à Putnam.

Dans sa formulation la plus simple, il dit en substance ceci : nous sommes gênés vis-à-vis des mathématiques, parce que nous ne semblons pas pouvoir les considérer de manière confortable et plausible comme des sciences disant le vrai sur un objet externe. En revanche, nous voyons dans la physique par excellence le discours vrai par rapport au monde effectif. S'il est avéré, maintenant, que la mobilisation des mathématiques par la physique est incontournable (que les mathématiques sont *indispensables* à la physique), alors nous pouvons en conclure que les entités mathématiques sont elles aussi réelles. Quine soutient que dans les quantifications de nos discours résident nos engagements ontologiques : sont réputés exister par nous exactement tous les objets se laissant substituer aux variables sur lesquelles nous quantifions. Or le discours de la physique quantifie sur des objets mathématiques (pour toute valeurs réelles t et x du temps et de la position, $x=1/2gt^2+v_0t+x_0$ donne l'abscisse du point en chute libre). Donc ces objets “existent”.

Le frappant est que cet argument renverse simplement l'ancien argument kantien : Kant disait plutôt que la mathématique enveloppait de la connaissance synthétique a priori, et que la science newtonienne, visiblement, entrait dans une formulation géométrique lui permettant à elle aussi l'énoncé d'un savoir synthétique a priori. Mais dire que la physique tient un discours synthétique a priori, c'est dire que nous ne pouvons pas la comprendre comme un discours empirique (elle serait strictement a posteriori).

Donc, la physique rend la mathématique réaliste pour Quine ou Putnam, alors que la mathématique rend la physique non strictement réaliste pour la tradition kantienne. Le même attelage est utilisé de deux manières contradictoires, et tout tourne autour du problème des mathématiques.

3. *Le computationnel*

Les mathématiques interviennent d'une nouvelle manière, au cœur de quelque chose qui possède à la fois une dimension épistémologique et une dimension "civilisationnelle" si l'on veut : je veux parler de ce que l'on peut appeler la révolution informationnelle.

Donc, ce dont il s'agit, c'est des machines calculantes, des ordinateurs, comme on les appelle le plus souvent : de la discipline nouvelle ayant nom *informatique*, et de la mutation polymorphe de la vie sociale qui résulte de la miniaturisation des machines ; de l'apparition du réseau mondial des réseaux, du progrès de l'informatisation des activités et des sciences.

Tout cela, qui s'impose à tout sujet de nos jours, qui ne laisse personne indemne, commence apparemment dans les mathématiques. La généalogie la plus commune et la plus évidente de la révolution informatique la fait remonter à l'article de Turing dans lequel il introduit la machine portant aujourd'hui son nom[9] : une "machine théorique", notion nouvelle et surprenante qui voit le jour en même temps. Ce qui s'ouvre à cette occasion est un compartiment de la logique que l'on appelle théorie de la calculabilité, ou une discipline nouvelle que l'on appelle informatique théorique. L'une ou l'autre sont liées aux mathématiques, en plusieurs sens :

1) La théorie de la calculabilité s'insère dans la logique contemporaine, que l'on désigne sous le nom de *logique mathématique*, au titre du fait qu'elle partage avec la mathématique sa méthodologie symbolique et déductive.
2) L'invention de la machine de Turing s'inscrit en même temps dans l'histoire de la théorie de la démonstration, qui elle-même "procède" au fond de la volonté de justifier la mathématique formelle: de ce que l'on a appelé le "programme de Hilbert". L'article de Turing se présente en effet comme une réponse à l'*Entscheidungsproblem* soulevé par Hilbert. Les mathématiques sont donc concernées du côté de leurs fondements.
3) L'informatique, nouvelle discipline, avec l'algorithmique comme sous-discipline, correspond en même temps pour une part importante d'elle-même à une "strate" de la mathématique, la strate des problèmes et des objets combinatoires, finis et discrets. L'informatique met en relief à l'intérieur des mathématiques une base objective (celle des objets finis et discrets en substance) et une forme fondamentale (celle du calcul) qui tiennent une place centrale et essentielle en elles.

[9] Cf. A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in « Proc. London Math. Soc. », Ser. 2-42, 1936, pp. 230-265.

En tout cas, chacun reconnaît de nos jours que la philosophie devrait trouver ce qu'elle a à dire sur un tel sujet. On le lui demande même au nom de cette urgence sociale et politique à laquelle si souvent, on a voulu la ramener voire la soumettre. Et à laquelle d'ailleurs, depuis le cas du marxisme, elle s'est souvent abandonnée avec enthousiasme.

Or je pense que tout effort pour traiter de la révolution informationnelle à un niveau philosophique retrouve, pour ainsi dire sur son chemin, le problème des mathématiques. Je voudrais juste donner une idée résumée et synthétique de quelques aspects de la réflexion à laquelle nous engage la mutation informatisante à laquelle nous assistons. On trouvera une exposition plus complète et plus conséquente de ces matières dans mon *Le monde du computationnel*[10].

Il y a, d'abord, la question du sens en lequel on peut parler de *révolution*. Bien que nous disposions déjà d'usages hétérogènes du mot, puisque nous parlons facilement de révolution politique, de révolution économique ou industrielle et de révolution scientifique, il semble que jusqu'ici ces emplois trouvent une certaine unité dans la notion de “réinstitution” : nous parlons de révolution chaque fois que nous croyons observer, à un moment et dans un domaine, le passage de certaines formes d'organisation admises comme ayant autorité à de nouvelles formes. La révolution consiste justement dans l'abandon et le désaveu des anciennes formes au profit des nouvelles : un abandon et un désaveu dont on suppose de plus qu'il s'opère de manière systématique et volontaire. C'est pourquoi on peut parler de réinstitution : le mode délibéré, volontariste du geste instituant fait partie de la notion. Les cas des révolutions économiques ou industrielles est le moins net à cet égard, mais il reste un bon cas : la révolution électrique, par exemple, passe sans nul doute par des stratégies d'entreprises, ainsi que par une connivence délibérée de l'État et des entreprises.

De son côté, la révolution informationnelle consiste dans l'adoption d'un nouveau support (le support numérique) qui est à la fois support du recueil des données et lieu incontournable des traitements computationnels (des calculs). Ce nouveau support n'est pas institué comme le seul désormais légitime, destiné à remplacer les autres : dans beaucoup de cas il se présente à côté des anciens supports, permettant des actions en parallèle avec les anciennes actions. La déferlante du mode computationnel apparaît comme une tendance lourde que personne ne décide ou n'institue : plutôt, les institutions tentent de légiférer ex-post une fois que

[10] Cf. J.-M. Salanskis, *Le monde du computationnel*, Encre marine, Paris 2011.

le nouveau format des données et les nouvelles modalités des pratiques ont – déjà – changé le paysage.

L’apparition d’un tel nouveau support est sans doute quelque chose de plus radical que les anciennes révolutions, de plus absolument transversal à toutes les dimensions de la vie humaine. Et en même temps c’est tout à fait autre chose qu’une réinstitution : la meilleure comparaison possible serait avec l’invention de l’écriture, ou celle de l’imprimerie.

Les mathématiques sont concernées par l’apparition de ce nouveau support essentiellement à l’endroit suivant : le support numérique révèle la connivence et l’homologie profonde des formes linguistiques et des formes mathématiques. Que nous ayons pu entrer tous dans l’usage des traitements de texte, et que notre manière d’écrire s’en soit trouvée profondément transformée, cela “dérive” en un sens du fait que les expressions linguistiques se laissent coder, sans violence aucune, dans le champ numérique, et que nombre des opérations qui ont cours au niveau du texte se laissent ramener à la forme de la manipulation syntaxique, relevant en dernière analyse de la catégorie du calcul. L’étrangeté de la lettre et du nombre n’est plus pensable : l’informatique affiche publiquement une homologie de l’arithmétique et du linguistique que la pensée constructive avait mis au jour dans le débat sur les fondements, dès Brouwer sans doute.

Un second élément important est que nous sommes appelés à distinguer, dans la révolution informationnelle, ses deux niveaux d’opération. D’un côté, elle nous engage dans un mouvement de traduction de toutes les données partagées – de toutes les données de la culture – vers le format numérique permettant leur stockage, et leur affichage sous des formes variées sur les écrans servant d'interfaces aux outils numériques (ordinateurs, smartphones, tablettes). De l’autre côté, elle nous permet de concevoir au plan numérique des actions portant sur les données : des “calculs” au sens de Turing, Gödel et Church. Ces actions, parfois, suppléent à des actions que nous accomplissions autrement, directement sur les données dans leur état non numérisé. Dans d’autres cas, elles sont des actions préalables préparant une action classique de notre part (via notre corps). Enfin, comme nous le disions plus haut, il peut y avoir mise à disposition en parallèle, dans le monde, de l’action en mode classique et de l’action en mode numérique (ainsi, je peux toujours constituer une affiche en collant sur un support des morceaux de texte et d’image, même si, de nos jours, on fera beaucoup plus la chose avec un logiciel dit paginateur).

C’est un exercice de discernement vis-à-vis de la vie sociale en proie à la révolution informationnelle de distinguer les deux aspects : l’aspect traduction vers le format numérique – qui correspond, mathématiquement, à le “reconstruction” de la classe de données comme une classe “constructive” d’objets, justiciable d’une définition récursive – et l’aspect définition d’un traitement de l’ordre de calcul, qui passe par la programmation d’une fonction. Dans certains cas, ce qui est génial est la traduction (comme, par exemple, dans le cas de la capture des sons et des images). Dans d’autres cas, ce qui est prodigieux est l’algorithme (si c’est un algorithme qui pilote une intervention chirurgicale par exemple). Nous sommes invités ainsi par la révolution informationnelle à une sorte de relecture mathématique du monde, mobilisant les mathématiques constructives et computationnelles.

La révolution informationnelle, par ailleurs, suscite une réflexion sur les limites de la mise en forme numérique du monde et de ses actions. Celles et ceux qui ont travaillé sur cette question me semblent arriver toujours aux mêmes résultats : la limite serait, en somme, triple. Ce que le régime du computationnel ne transcrit ou ne transpose pas, ce sont en effet le *continu*, le *corps* et l’*herméneutique*. Quelques mots de précision sont ici nécessaires.

Le continu. Les machines calculantes sont installées à demeure dans le fini et le discret. Aller vers le dénombrable suffit à révéler leur incompétence : une fonction quelconque n’est correctement réalisée par un programme que sur une distance finie. À vrai dire, on ne parvient à entrer en la machine les valeurs auxquelles appliquer une fonction, pour commencer, que tant qu’elles restent de complexité limitée. Pour prendre un exemple évocateur, lorsque vous produisez une suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ en itérant indéfiniment l’action de f, au bout d’un certain temps – dans les cas convenables – votre machine affiche la limite théorique l satisfaisant $f(l)=l$, avec le degré d’approximation dont elle est capable, au lieu de persister à calculer des valeurs distinctes de l manifestant la convergence sur le mode asymptotique (en supposant que c’est ce que prévoit et décrit l’analyse réelle). De même, le théorème des valeurs intermédiaires est faux pour les valeurs effectivement connues ou atteintes par l’ordinateur (comme il l’est dans l’ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$, à vrai dire).

Nous constatons donc une incapacité foncière à exhiber, manifester le continu, à s’égaler à lui en aucune façon. Ce qui n’empêche pas de concevoir des programmes qui “vérifient” ou attestent les lois générales concernant le continu que la mathématique est capable de prouver. De manière liée, les calculs des ordinateurs peuvent servir de mode d’exploration pour mettre en lumière des comportements tendanciels des nombres décimaux, dont on voudrait établir qu’ils expriment des propriétés universelles nécessaires des nombres réels.

La difficulté philosophique s’associant à ce qui vient d’être dit est que l’on peut émettre deux objections au verdict de l’incompétence des ordinateurs au sujet du continu.

La première consiste à remarquer que le discours mathématique lui-même est débordé ou dépassé par le continu : il ne sait pas, par exemple, nommer chaque nombre réel. Tout le savoir de ce que nous visons comme l’ensemble transdénombrable des nombres réels passe par une expression théorique formelle et finie tout à fait de la même espèce que ce que l’ordinateur manipule et tolère. La différence, en fin de compte, réside dans l’effet intentionnel de la visée du continu transdénombrable : un effet que nous attribuons à notre discours mathématique, mais pour lequel nous ne trouvons pas d’équivalent du côté des machines.

La seconde consiste à faire valoir que, néanmoins, les simulations finies du continu dont les ordinateurs sont capables sont plus que satisfaisantes pour la grossièreté de nos perceptions : une image définie avec un nombre de pixels assez grand nous paraît d’une richesse “continue” bien autant que le réel lui-même (nous ne gardons avec nos organes perceptifs de l’une et de l’autre qu’une caricature finie).

Le débat peut ainsi se poursuivre, à trois niveaux en quelque sorte : débat sur la fictionnalité du continu mathématique, débat sur l’effectivité du continu physique, débat sur un éventuel continu cognitif. La limite du computationnel que serait le continu demeure incertaine et contestable.

L’herméneutique. L’argument, cette fois, est celui que Hubert Dreyfus a développé dans son célèbre *What Computers Can’t Do*, une évaluation critique du projet de l’intelligence artificielle qui a été rééditée plusieurs fois[11]. Dreyfus constate d’abord que le projet de l’intelligence artificielle consiste à reconstruire tout comportement intelligent humain comme application de règles. Il observe ensuite que, dans les faits, lorsqu’on tente ce genre de transcription, on bute sur une difficulté que l’on peut identifier comme le besoin de méta-règles. Il y a bien, en effet, impliquées dans le comportement intelligent en cause, des règles que l’on suit, seulement la difficulté est que, en général, l’agent intelligent n’est pas supposé mettre en acte une telle règle dans tous les cas, aveuglément et sans égard à la situation. Il ne le fait que s’il se trouve dans des circonstances pertinentes pour l’application de la règle en cause. Il semble donc que le logiciel que l’on essaie d’écrire et qui récupèrerait notre intelligence usuelle

[11] Cf. H. Dreyfus, *Intelligence Artificielle, Mythes et Limites*, trad. franç. R.M. Vassallo-Villano, Flammarion, Paris 1984 ; édition américaine *What Computers Can’t Do* (1972, 1979, 1992).

devrait disposer, en plus des règles dont l'application réalise la tâche considérée, de méta-règles stipulant dans quel cas "lancer" telle ou telle règle. Ce qui donne le sentiment d'être l'amorce d'une régression à l'infini.

Ce qui manque à la programmation d'une fonction récursive ou récursive primitive, en l'espèce, c'est une sorte de faculté d'évaluation holiste du contexte. Les paramètres à prendre en compte dans une telle évaluation ne se laissant pas confiner dans un registre déterminé : plus ou moins tout trait de l'environnement, mais aussi tout trait de la psychologie embarquée et tout trait de la normativité sociale encadrant celle-ci sont candidats à compter.

Dreyfus observe que dans le cas de l'agent humain, le problème est nativement résolu par la façon dont l'existence habite son monde, nage en lui. Il relie cette conception à la notion phénoménologique d'*être-au-monde*, qu'il trouve avantage à considérer dans sa version merleau-pontienne, où la prise sur le monde en situation est originairement le fait du corps.

Mais, comme il a été reconnu par nombre d'esprits réfléchissant à ces matières, et comme cela se dessine à vrai dire dès les formulations heideggériennes, le jeu de l'être-au-monde est foncièrement interprétatif. Savoir quelle règle appliquer revient à interpréter la situation : l'être-au-monde corporel, le *Dasein* incarné, produit toujours une telle interprétation par sa façon même d'en user avec son environnement, de naviguer en lui. Ce qui manque aux ordinateurs, c'est cet "en-vue-de-soi" des organismes humains qui s'exprime comme projection interprétative de leur monde, socle quasi-naturaliste annonçant les subtilités de la lecture des textes (où l'on reconnaît à l'œuvre, également, les fonctions de projection et d'anticipation mises en lumière par la tradition herméneutique, de Schleiermacher à Gadamer et Ricœur).

La limite du calcul comme forme et modèle de la pensée, et de l'objectivité constructive symbolique comme forme et modèle de la donnée, est donc double : l'objet peut prétendre échapper au nouveau régime informationnel en tant qu'objet relevant du continu et excédant à ce titre l'objectivité constructive, la pensée peut prétendre échapper au régime computationnel en tant que projection interprétative en situation excédant le mode "gouverné par des règles".

À quoi il faut ajouter, nous l'avons annoncé, une troisième limite : celle du corps, qui ne se confond pas avec les deux premières mais les confirme sans doute.

Le corps. L'informatique est installée dans le champ de l'idéalité symbolique, donnant lieu à la procédure récursive. Les contenus des mémoires sont identifiés à des 0 ou des 1, valeurs fonctionnant comme des invariants au-dessus de leurs innombrables instanciations, dans une même mémoire, et d’une implantation de la machine théorique idéale à l’autre. Chaque programme auquel on donne le loisir de s’exécuter s’identifie à un texte, lui-même susceptible d’un nombre illimité d’instanciations, en machine et hors machine. Tout fragment de donnée ou tout morceau de procédure est répétable à l’envi, sans que son identité ne soit altérée par ces répétitions. Par conséquent, lorsque des données à l’origine non numériques sont portées au format numérique, ou lorsque des actions non computationnelles à l’origine sont traduites en computations numériques, c’est à chaque fois un élément du monde sensible et corporel ou un segment de devenir mondain qui sont transportés ou transposés dans le champ idéal du computationnel.

Interprété du côté de la “vie de l’esprit”, c’est-à-dire en comprenant la révolution informationnelle comme promouvant une version inédite du *Mind* – entité autrefois découverte et célébrée par les modernes – ce passage à l’idéalité via le computationnel signifie avant tout l’oubli du corps : de ce pré-sujet, sous-sol de la vie humaine, ancêtre et support de tout esprit, depuis lequel se détermine un rapport au monde dans la perspective duquel le monde est chair. C’est la philosophie de Merleau-Ponty qui dépeint au mieux ce “reste” – laissé de côté par la révolution informationnelle – qu’est le corps. Au gré de cette philosophie, d’ailleurs, l’oubli du corps tend à coïncider avec le manquement par rapport au mode herméneutique de la pensée.

4. *Les mathématiques et la vérité*

Si les mathématiques sont ainsi capables de faire problème pour la rationalité, pour l’épistèmè et sa philosophie – dont elles apparaissent pourtant, le plus souvent, comme le meilleur champion – c’est peut-être en raison de leur positionnement exceptionnel par rapport à l’enjeu suprême de toute connaissance, la vérité.

Pour le montrer, je vais dévoiler quelque peu ma pensée la plus personnelle, en faisant état de ce que j’appelle *ethanalyse de la vérité* (et dont on trouvera l’exposition pleine dans *Partages du sens*)[12].

[12] Cf. J.-M. Salanskis, *Partages du sens*, Presses Universitaires de Paris Nanterre, Nanterre 2014, pp. 109-147.

L'idée est que l'affaire de la vérité se laisse comprendre à la lumière de notre adhésion à une tradition séculaire : nous nous efforçons, depuis fort longtemps, de satisfaire à l'enjeu ou l'appel de la vérité, tel qu'il résonne auprès de nous à partir du mot lui-même. Un mot exceptionnel en ce que, pour une part, sa valeur n'est pas extensionnelle : le mot vaut comme ce que j'appelle un *sollicitant*, c'est-à-dire qu'il exprime un appel, nous l'entendons comme nous demandant de rejoindre la hauteur de son enjeu. Nous partageons le sens de la vérité dans ce que j'appelle un *ethos* : un ensemble comportemental admettant les exigences de la vérité comme ce par rapport à quoi l'on se mesure (le *nous* nommé au début de la phrase est plus précisément celui des *adeptes* de l'ethos, celles et ceux qui sont sensibles à l'appel). L'ensemble comportemental en cause, bien qu'il puisse être constitué d'actes déficients par rapport à l'enjeu de la vérité, persiste à se situer par rapport à lui : au sein de l'*ethos* de la vérité on juge les comportements par rapport à l'enjeu de vérité.

Clairement, ce qui précède présuppose déjà silencieusement que l'appel de la vérité a été converti en une liste explicite d'exigences : sinon, se mesurer à l'enjeu de la vérité ne signifierait rien de suffisamment déterminé. L'ethanalyse est l'enquête philosophique qui, pour chaque "appel" véhiculé par un sollicitant, travaille à exhiber la liste des prescriptions déterminant implicitement entre nous la fidélité à l'enjeu : une liste que j'appelle la *sémance* de l'ethos. Un ethos, à chaque fois, possède aussi une dimension historique : ses adeptes transmettent l'enjeu aux générations ultérieures, font en sorte que l'on continue de se rattacher aux exigences de la sémance, que l'on persiste à partager le sens en cause.

Néanmoins, par essence, pour autant qu'ils dépendent de notre constance, de notre fidélité, les ethos sont des traditions contingentes. Et il en va ainsi de l'ethos de la vérité, même s'il a traversé les siècles et si nous sommes nombreux à "miser sur lui". Même s'il semble s'être acquis une sorte de place enviable, de prestige dans notre société. Cela n'interdit pas de, s'inquiéter de possibilités nouvelles de l'oublier qui se font jour.

Dans mon ouvrage de 2014, j'expose six prescriptions constituant la sémance de la vérité :

Deux prescriptions touchant le registre "ontologique" :

1) Regarde l'être comme étranger.
2) Envisage l'instance de la connaissance comme hors-être.

Ces deux prescriptions correspondent à la garde de la définition adéquationniste de la vérité. Nous devons regarder le réel comme non docile a priori à quoi que ce soit que nos humeurs ou intérêts puissent requérir. Et la connaissance est une performance qui n’inclut pas le sujet, qui le laisse dans un mystérieux écart vis-à-vis de toute réalité, au moment où elle détermine cette dernière. Si je tente une connaissance du rapport du savoir à l’être, je suscite une nouvelle instance hors être à l’arrière-plan de cette tentative.

Deux prescriptions touchant le registre “épistémologique” :

3) Accueille l’être étranger, comme un maître d’étude.
4) Pense et élabore une identité de la prestation de connaissance vers l’être accueilli.

Ces deux prescriptions élaborent l’idée d’une expérience et de l’émission d’un jugement vrai. Pour que nous puissions dire vrai, il faut que nous ayons accueilli l’être étranger. Mais cela ne saurait avoir le sens d’un événement du réel, dont nous aurions la science avant la connaissance : plutôt, l’étrangeté s’impose à nous dans un accueil suivant lequel elle entre en nous comme information, exactement comme le maître d’études fait venir en nous des pensées que nous n’avions pas déjà. Reste alors à concevoir un mode et une règle de l’identité de ce que nous disons dans le langage et de ce qui est accueilli (dont la forme doit se prêter à une telle identité).

Deux prescriptions touchant le registre “pragmatique” :

5) Assume l’engagement dans la vérité de ton discours.
6) Ecoute le niveau décontextualisé de tout dit.

Ces deux prescriptions élaborent l’idée que notre pratique du langage “repose dans la vérité” (ou du moins, est appelée à “reposer dans la vérité”). Ce que nous déclarons, nous le déclarons forcément comme assertion vraie auprès du réel. Et ce que nous énonçons, s’il dépend d’un contexte, renvoie à une énonciation de cette dépendance elle-même qui vaut hors tout contexte (de même que, lorsque je prouve B sous l’hypothèse A, j’ai prouvé $A \rightarrow B$ sans hypothèse).

La question que l’on peut poser, à ce stade, c’est si les mathématiques soulèvent une difficulté à ce niveau absolument général de la structure normative de la vérité. S’il en va bien ainsi, cela procure, peut-être, un éclairage sur le statut paradoxal et exceptionnel des mathématiques par rapport à l’intention d’une philosophie des sciences.

Pour résumer mes conclusions, il apparaît à l’examen que les mathématiques fournissent un cas dégénéré d’observance de l’injonction 1 de la sémance. À certains égards pour cette raison même, elles offrent au contraire une observance "superlative" de l'injonction 4.

En effet, pour nous concentrer d'abord sur le point de l'injonction 1, comment la mathématique peut-elle se concevoir comme connaissance d'un "être étranger" ?

On accordera au "tournant linguistique" du vingtième siècle que l'instance du connaître, pour nous, ne peut être que langagière. Il est apparu assez clairement, il me semble, et beaucoup de philosophes l'ont dit de beaucoup de façons, que l'instance du connaître n'est pas un sujet psychologique, mais correspond plutôt à un ensemble de procédures et à un horizon d'expression qui sont ceux du langage. De plus, en situant résolument toute mathématique dans le contexte d'un langage formel, l'approche contemporaine a pour ainsi dire souligné et officialisé ce point dans le cas des mathématiques. Donc, ce par rapport à quoi l'être "à connaître" doit se manifester comme étranger, c'est la réalité linguistique, c'est-à-dire une réalité de type idéal, de part en part : les unités constituantes des langages sont des types, et les règles des langages sont des règles s'appliquant à des répétitions de cas et des règles dont la forme se répète dans chaque cas. En telle sorte que, c'est une partie de ce que la pensée contemporaine nous a enseigné et fait comprendre, la réalité linguistique est tout entière prise dans le jeu idéal du type, de l'occurrence et de la répétition ne compromettant pas l'invariant qu'est le type. Un théorème s'identifie par suite à une forme d'assemblage idéale d'unités idéales, dominant une diversité illimitée d'occurrences. En ce sens, la connaissance mathématique "incarne" de façon parfaitement satisfaisante le "hors être" de l'instance du connaître dont parle l'injonction 2. Avant tout formalisme, à vrai dire, il n'y a déjà pas de place dans notre ontologie pour l'invariant du mot *maison*, seulement "présenté" par chacune de ses occurrences, avec laquelle il ne s'identifie pas.

Intéressons nous alors d'abord à l'objectivité la plus basique et la plus inaliénable dont traite la mathématique[13] : l'objectivité qu'on peut appeler *constructive*, celle que Brouwer avait mise en avant (et celle sous laquelle se rangent les données que nous fournissons à nos ordinateurs). En effet, cette objectivité, qui est celle des objets qui se laissent construire conformément aux clauses d'une définition récursive, se trouve être "déjà", ou "originairement" si l'on préfère, l'objectivité des expressions formelles.

[13] Pour tout ce qui suit, cf. J.-M. Salanskis, *Philosophie des mathématiques*, Vrin, Paris 2008, pp. 35-108.

Les termes, formules et preuves d’un langage formel relèvent d’une définition récursive comme les entiers naturels dans la perspective constructive. Par suite, on peut redouter que la connaissance mathématique, comme connaissance constructive de l’objet constructif, soit toujours seulement redoublement spéculaire : réflexion par le langage de ses propres structures. De fait, si l’on considère la preuve formelle de 7+5=12 dans le système PA (l’arithmétique formelle de Peano), on observe qu’elle répète, dans l’économie des lignes successives dont elle se compose, la synthèse a priori de 12 à partir de 7 et 5 autrefois décrite par Kant, qui est la même chose que l’élaboration de 7+5 comme indication de construction conduisant au même construit que 12 (la preuve, simplement, utilise cinq fois l’axiome $x+Sy=S(x+y)$). La connaissance, en l’espèce, se montre, comme on pouvait le redouter, spéculaire. Jusque là, il peut sembler que l’injonction de l’étrangeté de l’être à connaître soit purement et simplement ignorée.

Néanmoins, au moyen de l’arithmétique formelle – intuitionniste ou non – sont développés des outils et obtenus des résultats qui affrontent les configurations arbitraires concernant des constructions de longueur ou de complexité illimitée. Même la connaissance constructive de l’objectivité constructive s’avère ainsi tournée vers la complexité, mode de l’“immaîtrisable jusqu’à nouvel ordre” dans le champ de l’objectivité constructive. En telle sorte que, déjà au plan de ce sous-sol de la connaissance mathématique, l’“être” à connaître – qui, d’abord, n’est autre que l’idéalité des configurations arithmético-linguistiques – prend finalement une figure d’étrangeté : soit l’étrangeté minimale liée au fait qu’il est cité et mis en scène comme objectivité justement (et pas seulement vécu sur le mode opérationnel comme il en va ordinairement avec les entités linguistiques), soit l’étrangeté supplémentaire et décisive liée à l’horizon de la complexité. Le nom 3 – répétable à l’envi – se distingue de l’insaisissable qu’est l’entier naturel successeur du successeur du successeur de 0 “lui-même”, et la preuve que la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$ embrasse la complexité (à une profondeur ou échelle arbitraire). Ce dont traite la mathématique constructive, c’est ainsi du champ d’objets enveloppé dans notre opérativité langagière originaire, “rehaussé” ou transfiguré dans une posture d’être étranger par son installation au pôle référentiel ou intentionnel, et par l’horizon de la complexité : par un regard cherchant en lui l’asymptotique de ce qui se tisse en lui.

Mais nous devons évoquer aussi le second versant de la connaissance mathématique, ce que j’appelle le versant de l’objectivité corrélative. Cette fois, l’objet dont traite la mathématique est pris comme membre de multiplicités convoquées sur un mode pour ainsi dire “métaphysique” par une stipulation axiomatique. On peut en effet aussi, c’est en substance ce à quoi Hilbert nous a encouragés en définissant la méthodologie formaliste, introduire “d’un seul coup” la classe des objets dont on veut traiter par la stipulation dans une liste d’axiomes des propriétés que l’on souhaite voir satisfaites collectivement par eux (les axiomes, en règle générale, comportent une quantification implicite ou explicite mobilisant l’universel sur le mode du $\forall$ ou du $\exists$). Et ce que l’on appelle connaître de tels objets coïncide alors avec la déduction de théorèmes dans la théorie logique spécifiée par la base axiomatique adoptée.

Un tel mode du connaître identifie bien, de nouveau, l’instance du connaître à l’idéalité d’un langage formel : les interventions exprimant la connaissance sont des textes listant des formules du langage considérée, s’achevant dans une formule prenant le nom de *théorème*, distinguée par là comme disant le vrai. Mais l’être à connaître revêt-il le statut d’être étranger ?

Il le fait en un triple sens : 1) d’un côté, le rapport des mathématiciens à l’univers de corrélation s’associant à la stipulation axiomatique (typiquement, l’univers des ensembles suscité par la stipulation de la théorie ZFC) est un rapport phénoménologique de projection, prenant même la valeur d’un être-au-monde pour eux ; 2) d’un second côté, l’univers stipulé est stipulé devoir inclure en son sein le déploiement de toute objectivité constructive, et la “vérité” associée du prouvable est supposée inclure comme cas particulier la (confirmation de la) vérité constructive. Donc l’univers auquel s’adresse la connaissance selon le schéma de l’objectivité corrélative enveloppe la complexité constructive, mode de l’étrangeté de l’être à l’étage inférieur ; 3) d’un troisième côté, la connaissance mathématique de l’objectivité corrélative entre dans le “jeu de l’infini”.

Pour développer le point 1) : les multiplicités projetées depuis des stipulations sont analysées dans leur variation possible depuis une théorie interne à ZFC qui est la théorie des modèles. Dans cette guise, et notamment à la suite des travaux de Kripke, un univers de corrélation, dans la version décalée qu’en donne la notion de modèle, devient l’expression mathématique de l’idée d’un “monde possible”. La pensée de l’objectivité corrélative met en scène l’être à connaître dans son étrangeté modale (il pourrait toujours être autre). D’autre part, non seulement le mathématicien “projette” en quelque sorte l’univers de corrélation à partir de la stipulation, lui donnant un statut ressemblant à celui du noématique chez Husserl (juste, c’est un noématique collectif enveloppant l’objectivité constructive et conservant la vérité constructive), mais encore, les axiomes ouvrent la possibilité de “gestes” dans l’espace théorique qui sont vécus comme des gestes dans l’univers stipulé. Typiquement, comme je l’explique dans *Philosophie des mathématiques*, un groupe est un domaine dans lequel je peux simplifier à droite ou à gauche[14]. J’associe donc un *faire* aux univers de corrélation, ce qui perfectionne l’illusion qui leur attache une étrangeté de monde.

Pour ce qui concerne le point 2) : en raison de l’axiome de l’infini (axiome qui pose, parmi la faune de l’objectivité corrélative ensembliste, un ensemble infini), on est assuré a priori que tout déploiement d’objectivité constructive trouvera sa place dans l’univers des ensembles. À vrai dire, tel est en substance le sens théorique donné par la stipulation au concept d’infini : un ensemble infini est un ensemble au sein duquel se laisse inclure une série récursive d’objets. Par conséquent, le “pseudo-être” intentionnel que s’est donné la stipulation ensembliste – lui conférant une étrangeté intentionnelle/modale de monde – enveloppe par principe l’horizon d’étrangeté de la complexité, évoqué à l’instant.

Pour considérer enfin le point 3) : la stipulation majeure de la mathématique contemporaine, celle de la théorie ZFC, nous avons déjà dû le dire pour expliquer qu’elle a affaire à la complexité illimitée, nous engage dans le jeu de l’infini. Ce qui veut dire non seulement qu’elle pose l’infini actuel, mais qu’en elle se développe (se retraduit) la théorie cantorienne du transfini. De la sorte, au déploiement de l’univers ensembliste s’associe aussi le jeu d’une transcendance : transcendance vis-à-vis de toute complexité constructive d’abord, mais aussi transcendance à l’égard de soi-même, empêchant que l’infini puisse jamais se stabiliser à un niveau ultime quelconque. L’étrangeté du pseudo-être dévisagé, prend ainsi une figure radicale, celle de l’infini, dont l’énigme défie la pensée depuis toujours.

De fait, le débat épistémologique du XX^e^ siècle témoigne de ce que, avec l’infini, la mathématique est entrée dans un régime portant à l’extrême le “fictionnel” que l’on pouvait depuis toujours lui imputer. Du point de vue de l’ethanalyse de la vérité, cela dit, un tel “excès” n’empêche pas, loin s’en faut, que l’être étranger soit pris comme maître d’étude, et que son étrangeté prenne précisément ce sens pour le connaître qui la poursuit : les divers axiomes supposés exprimer un mode ou une loi du transfini ensembliste (comme les axiomes de grands cardinaux, dont l’axiome de l’infini est le premier), fixent dans le langage et dans la théorie

14 Cf. *Philosophie des mathématiques*, cit., pp. 85-86.

une notion de transcendance “entendue” comme caractéristique de l’infini se proposant dans son étrangeté.

En bilan, on voit que la “vérité mathématique” tout à la fois s’inscrit dans l’ethos de la vérité, et en est un cas dégénéré vis-à-vis de l’injonction 1, parce que l’“être mathématique” prend d’abord une figure interne et proche. Il est originairement, comme être de l’objectivité constructive, homogène à l’élément actif intime du connaître (le linguistique constructif), ce qui semble interdire l’étrangeté ; mais celle-ci se voit sauvée comme étrangeté de principe du référent et comme apportée par l’horizon de la complexité. D’une seconde manière, comme être de l’objectivité corrélative, l’être mathématique apparaît comme non étranger aussi, dans la mesure où il est stipulé, et ce qui est vrai à son égard paraît commandé en interne par la structure idéale du langage. Mais, de nouveau, il récupère tout de même l’étrangeté comme projection intentionnelle, comme variation modale de monde, ou comme infini.

Parallèlement, nous comprenons aussi comment la vérité mathématique peut, dans cette condition paradoxale, être exemplaire. L’identité voulue par la clause 4 est parfaite dans le cas fondamental de la vérité spéculaire de la mathématique constructive ; et l’identité de la vérité est également sans faille dans le cas de l’objectivité corrélative, parce que l’être et sa configuration sont institués comme répondant sans écart et sans différence au dit et à sa forme. Par dessus le marché, la prouvabilité dans la théorie mettant en scène l’objectivité corrélative est supposée “conserver”, c’est-à-dire reprendre et retrouver dans son régime autre, la vérité constructive spéculaire fondamentale : c’est ce que Hilbert a formulé comme l’exigence dont nous devions garantir a priori le respect, dans son fameux “programme”. Nous nous autorisons donc à vivre la vérité mathématique comme une vérité disant une identité aussi rigide et absolue que l’identité spéculaire du cas constructif fondamental.

Cela explique le fait, souvent évoqué et commenté, qu’il nous est plus facile de remettre en question nos données perceptives que nos certitudes mathématiques : celles-ci ont un statut de super-vérités trans-empiriques souligné par des générations de philosophes, depuis Platon jusqu’à David Armstrong en passant par Kant.

Le tableau est donc bien celui que nous annoncions : la discipline qui ne satisfait que de manière dégénérée à l’injonction 1 de la sémance de la vérité est en même temps celle qui observe de la façon la plus généreuse et superlative son injonction 4.

5. *Conclusion*

Toute philosophie n’est pas attentive à ce statut paradoxal, statut de supplémentarité et d’exception, de la mathématique. La mathématique est pourtant sans doute, comme l’a dit Platon dès l’origine de la philosophie, la propédeutique par excellence de la philosophie. Mais elle l’est tout autant parce qu’elle nous enseigne l’inextricable, l’excès, l’étrangeté, que parce qu’elle nous détourne du sens commun et nous oriente vers l’idéalité. Les problèmes qu’elle soulève pour une philosophie cherchant à penser la science, ou le monde avec la science, sont également une manifestation supplémentaire de l’école d’humilité qu’est la mathématique. Pour qui a eu assez de bonnes dispositions envers les mathématiques pour découvrir quelques avenues de leur splendeur – coïncidant avec leur infinie, leur labyrinthique difficulté – il est bien difficile de ne pas retenir la leçon de la fragilité et de la modestie de nos pouvoirs intellectuels.

Qu’il me soit permis de noter, pour conclure, qu’à côté de l’orientation historique qui lui est très souvent reconnue, la philosophie française contemporaine des sciences, telle qu’elle a été formulée par plusieurs générations, de Brunschvicg à Granger et Vuillemin en passant par Cavaillès, Lautman et Desanti, a montré il me semble une sensibilité aux difficultés philosophiques liée aux mathématiques : on pourrait y voir sa signature, l’expression de son feeling propre, aussi légitimement que lorsqu’on les localise dans l’esprit historique. Et cette sensibilité, à mon avis, était liée à une reconnaissance de la grandeur déconcertante de la pensée mathématique.

En tout état de cause, on est en droit de demander à toute philosophie des sciences, il me semble, de ne pas passer à côté du “problème des mathématiques”.

English title: The issue of mathematics.

Abstract

This paper sustains that mathematics is a deep source of difficulties for philosophy of science in general. First, it is not easy for philosophy, while recognizing what it owes to mathematics, to locate itself with respect to it. Second, the main debate of philosophy of science – which opposes realism and something like projective rationalism – is governed by how we under-

stand the role of mathematics. Third, we have to refer to mathematics in order to build a correct picture of informational revolution, even if mathematics could count as a reason for resisting that revolution.

In its last part, the paper explains all these difficulties as rooted in the exceptional way mathematics satisfies the demands of truth.

Keywords: mathematics; philosophy; Kant; Frege; metaphysics; computers; continuum; hermeneutics; body; constructivism.

Jean-Michel Salanskis
Université Paris-Nanterre
jmsalanskis@gmail.com